

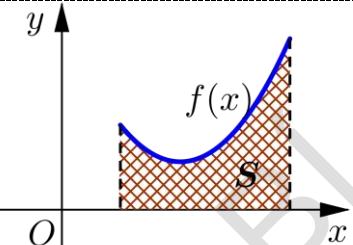
Bài 3. ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

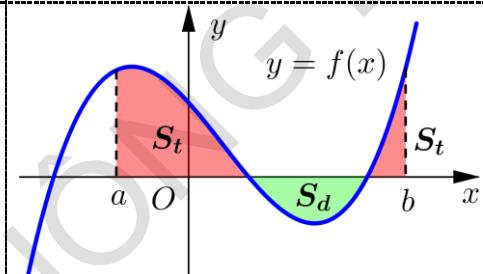
Dạng 1. Ý nghĩa hình học của tích phân

1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và không âm trên $[a; b]$. Khi đó $\int_a^b f(x)dx$ là diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox , $x = a$; $x = b$ thì $S = \int_a^b f(x)dx$



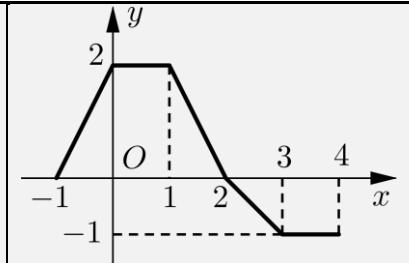
2. $\int_a^b f(x)dx = S_{\text{phía trên trục } Ox} - S_{\text{phía dưới trục } Ox}$ (trên đoạn $[a; b]$)

$$\int_a^b |f(x)|dx = S_{\text{phía trên trục } Ox} + S_{\text{phía dưới trục } Ox} \quad (\text{trên đoạn } [a; b])$$



- Câu 1.** Cho hàm số $y = f(x)$, với $-1 \leq x \leq 4$ có đồ thị là các đoạn

thẳng như hình vẽ bên. Khi đó $\int_{-1}^4 f(x)dx$ bằng

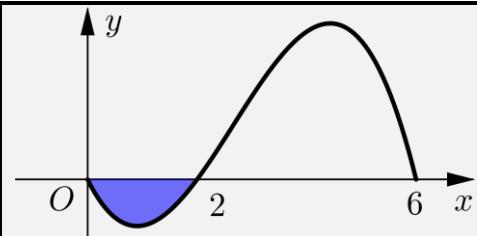


- | | |
|---------|-------|
| A. 1. | |
| B. 2.5. | |
| C. 4. | |
| D. 5.5. | |

- Câu 2.** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và có đồ thị trên

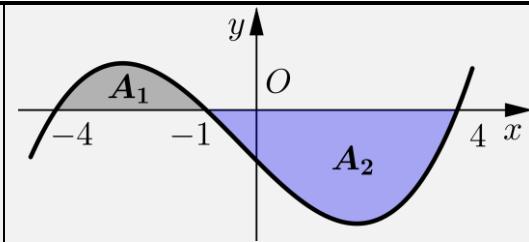
đoạn $[0; 6]$ như hình vẽ bên. Phần tô đậm có diện tích

$$\text{bằng } \frac{3}{2}, \text{ và } \int_0^6 f(x)dx = \frac{7}{2}, \text{ khi đó } \int_0^6 |f(x)|dx \text{ bằng}$$



- | | |
|---------------------|-------|
| A. 5. | |
| B. $\frac{13}{2}$. | |
| C. 2. | |
| D. $\frac{7}{2}$. | |

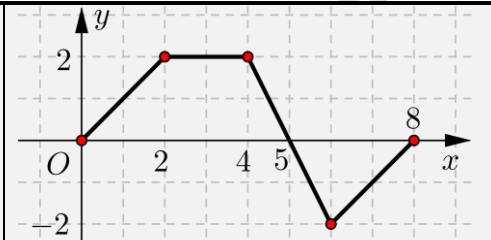
- Câu 3.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Gọi A_1, A_2 là các số dương biểu diễn cho diện tích của các phần gạch sọc phía trên và phía dưới trục Ox . Khi đó $\int_{-4}^4 f(x)dx - 2\int_{-1}^4 f(x)dx$ bằng



- | | |
|---|----------------------------------|
| A. A_1 .
B. $A_1 - A_2$.
C. $2A_1 - A_2$.
D. $A_1 + A_2$. |
.....
.....
..... |
|---|----------------------------------|

- Câu 4.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị trên $[0;8]$ như hình vẽ.

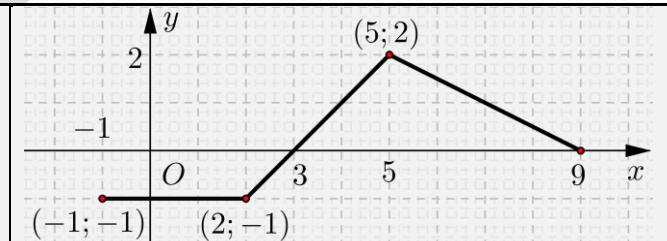
Khi đó $\int_0^8 f(x)dx$ bằng



- | | |
|-----------------------------------|----------------------------------|
| A. 4.
B. 1.
C. 8.
D. 10. |
.....
.....
..... |
|-----------------------------------|----------------------------------|

- Câu 5.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị trên $[-1;9]$

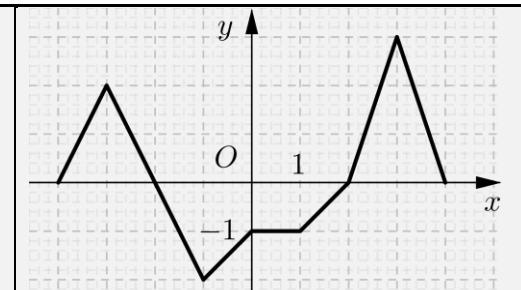
như hình vẽ. Khi đó: $\int_{-1}^9 [3f(x) + 2]dx$ bằng



- | | |
|--|----------------------------------|
| A. 48,5.
B. 9,5.
C. 27,5.
D. 7,5. |
.....
.....
..... |
|--|----------------------------------|

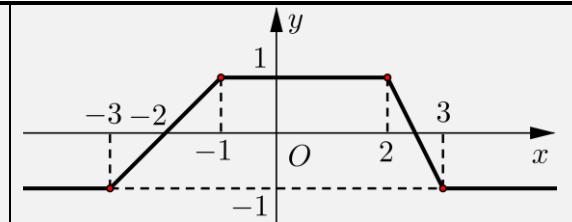
- Câu 6.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị trên $[-4;4]$ như hình

vẽ. Khi đó: $\int_{-4}^4 |f(x)|dx$ bằng



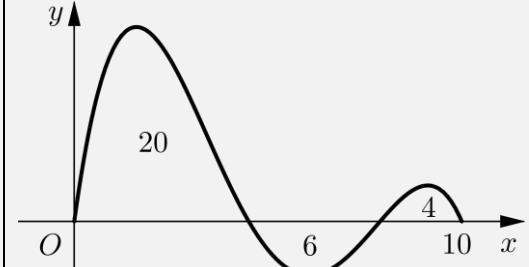
- | | |
|----------------------------------|----------------------------------|
| A. 1.
B. 5.
C. 8.
D. 9. |
.....
.....
..... |
|----------------------------------|----------------------------------|

- Câu 7.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số thực dương a để $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$ là



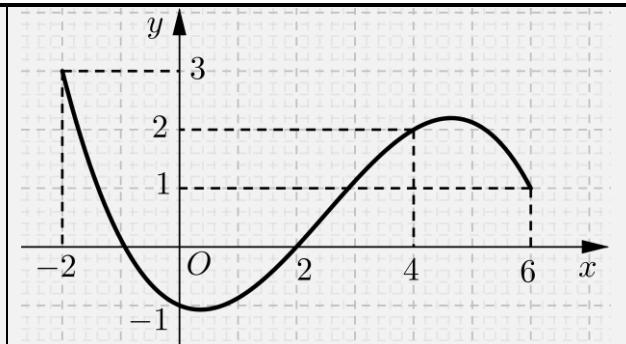
- | | |
|---------|-------|
| A. 3.5. | |
| B. 5. | |
| C. 4. | |
| D. 4.5. | |

- Câu 8.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ trên $[0;10]$ như hình vẽ. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = f'(x)$ và trục Ox là 20, 6 và 4. Nếu $f(0) = 2$, khi đó giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên $[0;10]$ là



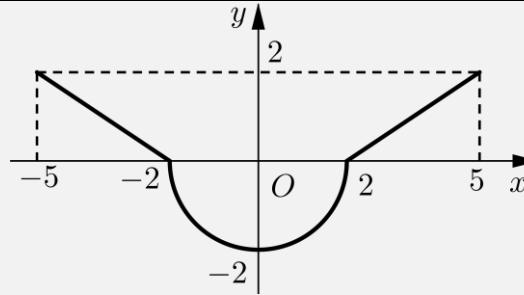
- | | |
|--------|-------|
| A. 22. | |
| B. 20. | |
| C. 16. | |
| D. 30. | |

- Câu 9.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và đồ thị của hàm số $f'(x)$ trên đoạn $[-2;6]$ như hình vẽ bên.
Mệnh đề nào dưới đây đúng?



- | | |
|----------------------------------|-------|
| A. $\max_{[-2;6]} f(x) = f(-2).$ | |
| B. $\max_{[-2;6]} f(x) = f(2).$ | |
| C. $\max_{[-2;6]} f(x) = f(6).$ | |
| D. $\max_{[-2;6]} f(x) = f(-1).$ | |

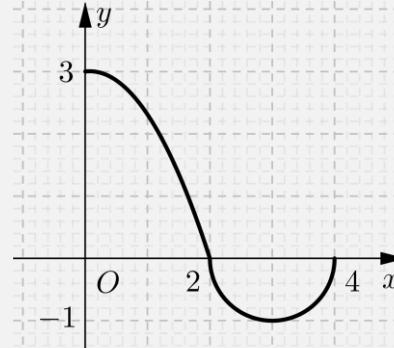
Câu 10. Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ gồm hai đoạn thẳng và một nửa đường tròn như hình vẽ bên. Biết $f(2) = 1$, giá trị của $f(-5)$ bằng



- A. $4 - 2\pi$.
- B. $2\pi - 3$.
- C. $2\pi - 2$.
- D. $6 - 2\pi$.

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ trên $[0; 4]$ như hình bên.

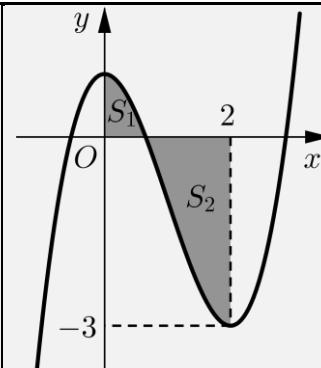
Mệnh đề nào dưới đây đúng?



- A. $f(0) < f(4) = f(2)$.
- B. $f(4) < f(0) < f(2)$.
- C. $f(0) < f(4) < f(2)$.
- D. $f(0) < f(2) < f(4)$.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[0; 2]$ có đồ thị như hình vẽ. Biết S_1, S_2 có diện tích lần lượt là 1 và 5, khi đó

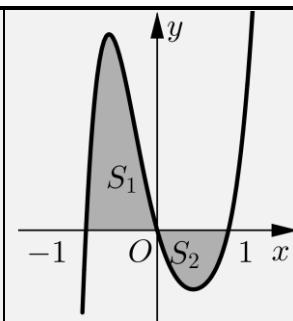
$$\int_0^2 x \cdot f'(x) dx \text{ bằng}$$



- A. -2.
- B. -12.
- C. -6.
- D. 4.

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-1; 1]$ có đồ thị như hình vẽ. Biết S_1, S_2 có diện tích lần lượt là 2 và 1, khi đó

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f(\sin x) dx \text{ bằng}$$



A. $-\frac{1}{2}$.

.....

B. 1.

.....

C. $\frac{3}{2}$.

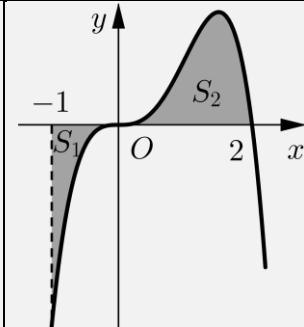
.....

D. $\frac{7}{4}$.

.....

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-1; 2]$ có đồ thị như hình vẽ. Biết S_1, S_2 có diện tích lần lượt là 2 và 6, khi đó

$$\int_{-1}^2 (x+1) \cdot f'(x) dx \text{ bằng}$$



A. -2.

.....

B. -12.

.....

C. -6.

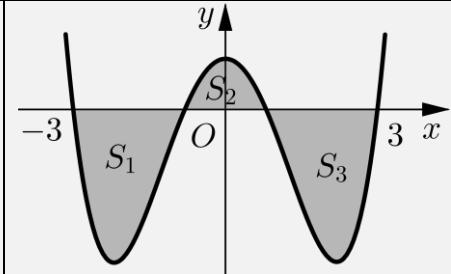
.....

D. -4.

.....

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-3; 3]$ có đồ thị như hình vẽ. Biết S_1, S_2, S_3 có diện tích lần lượt là 3, 1 và 3, khi đó $\int_{-1}^1 (1-x) \cdot f'(3x) dx$ bằng

$$\int_{-1}^1 (1-x) \cdot f'(3x) dx \text{ bằng}$$



A. $\frac{1}{2}$.

.....

B. 7.

.....

C. $-\frac{5}{9}$.

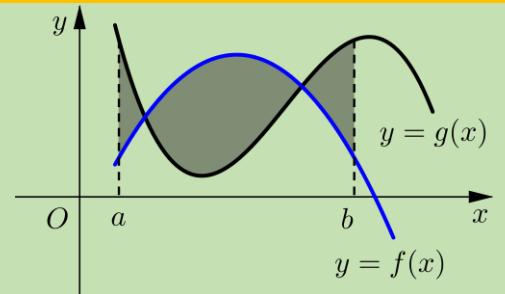
.....

D. -4.

.....

Dạng 2. Diện tích hình phẳng**Nhóm 1.**

- Hình phẳng giới hạn: $\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \\ x = a \\ x = b \end{cases} \Rightarrow S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$
- Nếu bài toán không cho cận thì các cận là **hoành độ giao điểm của hai đồ thị**

**Bài 1.** Tính diện tích hình phẳng giới hạn các đường

1. $y = x^3 + 11x - 6, y = 6x^2, x = 0, x = 2.$

.....
.....
.....
.....

2. $y = x^3 - x, y = 2x, x = -1, x = 1.$

.....
.....
.....
.....

3. $y = x, y = x + \sin^2 x, x = 0, x = \pi.$

.....
.....
.....
.....

4. $y = \sin x, y = \cos x, x = 0, x = \pi.$

.....
.....
.....
.....

5. $y = x^3 - x, y = x - x^2.$

.....
.....
.....
.....

6. $y = x^2 + 2x, y = x^3.$

.....
.....
.....
.....

7. $y = -2x^3 + x^2 + x + 5, y = x^2 - x + 5.$

.....
.....
.....
.....

8. $y = x^4 - 10x^2 + 9, Ox.$

.....
.....
.....
.....

9. $y = x^2 - 4x + 1, y = m, (m > 1)$ và hai đường thẳng $x = 0, x = 3$. Tìm m để $S = 15$.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

10. $y = -x^2 - 2x + 1, y = m, (m < -2)$ và hai đường thẳng $x = 0, x = 1$. Tìm m để $S = 48$.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Nhóm 2.

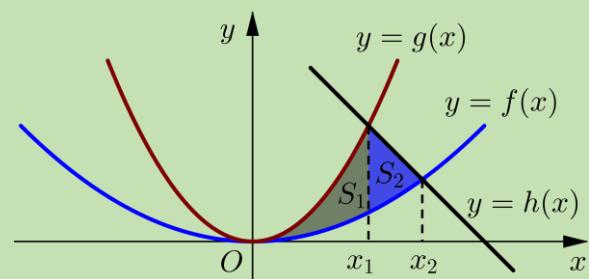
- Hình phẳng giới hạn: $\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \\ y = h(x) \end{cases}$.

- Sử dụng phương pháp hình học:

$$+) S_1 = \int_0^{x_1} (g(x) - f(x)) dx.$$

$$+) S_2 = \int_{x_1}^{x_2} (h(x) - f(x)) dx.$$

$$+) S = S_1 + S_2.$$



Bài 2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn các đường

11. $y = \sqrt{x+1}$, $y = 5 - x$, $y = 1$.

12. $y = \sqrt{x+2}$, $y = 4 - x$, $y = 1$.

13. $y = 2^x$, $y = 3 - x$, $y = 0$, $x = 0$.

14. $y = x$, $y = e^x$, $y = 0$, $x = 1$.

15. Cho số dương a thỏa mãn hình phẳng giới hạn bởi các parabol $y = ax^2 - 2$ và $y = 4 - 2ax^2$ có diện tích bằng 16. Tìm a

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

16. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = \ln x$; $y = 0$; $x = 0$; $x = k$ ($k > 1$). Tìm k để diện tích hình phẳng (H) bằng 1 (đvdt).

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 16. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = f(x)$ liên tục, trực hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được tính theo công thức

A. $S = \int_a^b |f(x)| dx .$

B. $S = \int_a^b f(x) dx .$

.....

C. $S = \int_a^0 f(x) dx + \int_0^b f(x) dx .$

D. $S = \int_a^0 f(x) dx - \int_0^b f(x) dx .$

.....

Câu 17. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = f_1(x)$, $f_2(x)$ liên tục và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được tính theo công thức

A. $S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| dx .$

B. $S = \left| \int_a^b (f_1(x) - f_2(x)) dx \right| .$

.....

C. $S = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)] dx .$

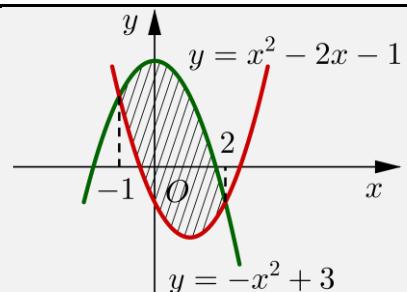
D. $S = \int_a^b f_1(x) dx - \int_a^b f_2(x) dx .$

.....

Câu 18. Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?

A. $\int_{-1}^2 (2x^2 - 2x - 4) dx .$

B. $\int_{-1}^2 (-2x + 2) dx .$



C. $\int_{-1}^2 (2x - 2) dx .$

D. $\int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx .$

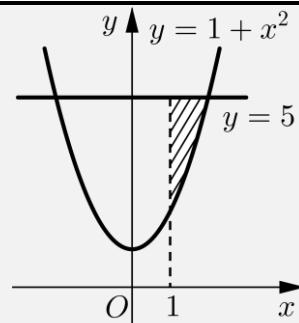
Câu 19. Công thức nào dưới đây được dùng để tính cho phần gạch sọc trong hình bên?

A. $\int_1^2 (4 - x^2) dx$.

B. $\int_1^2 (x^2 - 4) dx$.

C. $\int_1^5 (x^2 - 4) dx$.

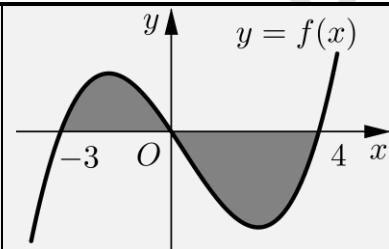
D. $\int_1^2 (x^2 + 6) dx$.



Câu 20. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình bên. Diện tích hình phẳng (phần gạch trong hình) là

A. $\int_0^{-3} f(x) dx + \int_0^4 f(x) dx$. B. $\int_{-3}^1 f(x) dx + \int_1^4 f(x) dx$.

C. $\int_{-3}^4 f(x) dx$. D. $\int_{-3}^0 f(x) dx + \int_4^0 f(x) dx$.



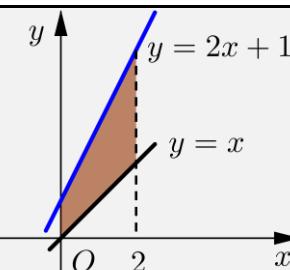
Câu 21. Viết công thức diện tích phần gạch tô đậm trong hình bên

A. $\int_0^2 |3x+1| dx$.

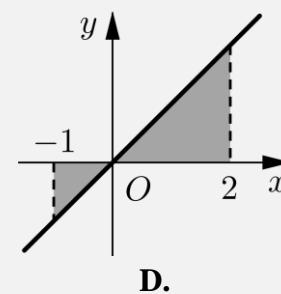
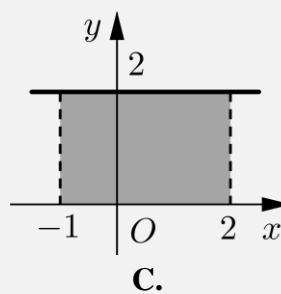
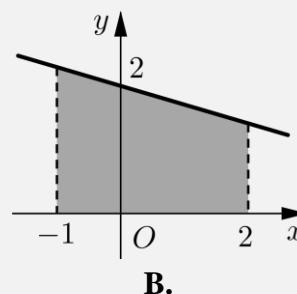
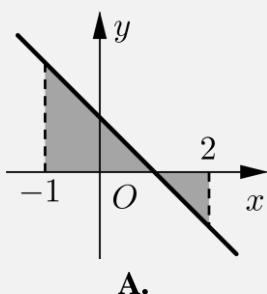
B. $\int_0^2 (x+1) dx$.

C. $\int_0^2 [x - (2x+1)] dx$.

D. $\int_{-2}^0 |(2x+1) - (x+1)| dx$.



Câu 22. Hình gạch sọc nào dưới đây có diện tích được tính bằng công thức $\int_{-1}^2 2 dx$?

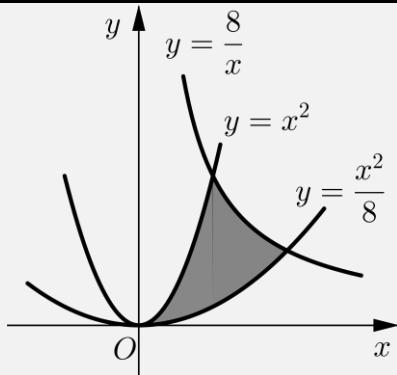


Câu 23. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi ba đồ thị hàm số $y = \frac{8}{x}$;

$y = \frac{x^2}{8}$; $y = x^2$ (phần gạch sọc) được tính công thức nào?

A. $\int_0^2 \left(x^2 - \frac{x^2}{8} \right) dx + \int_2^4 \left(\frac{8}{x} - \frac{x^2}{8} \right) dx$. B. $\int_0^4 \left(x^2 - \frac{x^2}{8} \right) dx + \int_4^8 \left(\frac{8}{x} - \frac{x^2}{8} \right) dx$.

C. $\int_0^4 \left(x^2 - \frac{x^2}{8} \right) dx + \int_2^4 \left(\frac{x^2}{8} - \frac{8}{x} \right) dx$. D. $\int_0^4 \left(x^2 - \frac{x^2}{8} \right) dx + \int_4^8 \left(\frac{8}{x} - x^2 \right) dx$.



Câu 24. Hình bên là đồ thị của hàm số $y = x^2 + x - 2$, $y = x + 2$, $y = x^2$.

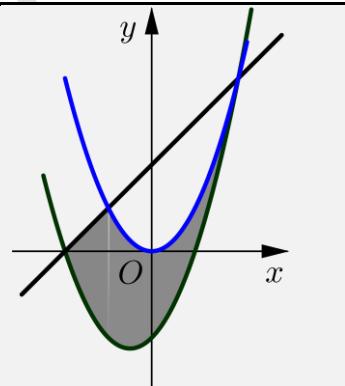
Diện tích phần gạch sọc được tính bằng công thức nào đây?

A. $\int_{-2}^2 (4 - x^2) dx + \int_{-1}^2 (2 - x) dx$.

B. $\int_{-2}^{-1} (2 + x - x^2) dx + \int_{-1}^2 (2 - x) dx$.

C. $\int_{-2}^{-1} (4 - x^2) dx + \int_{-1}^2 (2 - x) dx$.

D. $\int_{-2}^{-1} (4 - x^2) dx + \int_{-1}^2 (2 - x) dx$.



Câu 25. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S = \pi \int_0^2 e^{2x} dx$.

B. $S = \int_0^2 e^x dx$.

C. $S = \pi \int_0^2 e^x dx$.

D. $S = \int_0^2 e^{2x} dx$.

Câu 26. Diện tích hình giới hạn bởi hai đường thẳng $x = 0$, $x = \pi$, đồ thị $y = \cos x$ và trục Ox là

A. $S = \int_0^\pi \cos x dx$.

B. $S = \int_0^\pi \cos^2 x dx$.

C. $S = \int_0^\pi |\cos x| dx$.

D. $S = \pi \int_0^\pi |\cos x| dx$.

Câu 27. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 2$, $x = 1$, $x = 2$ và $y = 0$ là

- | | | |
|---------------------|--------------------|-------|
| A. $\frac{10}{3}$. | B. $\frac{8}{3}$. | |
| C. $\frac{13}{3}$. | D. $\frac{5}{3}$. | |

Câu 28. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = e^x + e^{-x}$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = -2$ là

- | | | |
|----------------------------|----------------------------|-------|
| A. $\frac{e^4 + 1}{e^2}$. | B. $\frac{e^4 - 1}{e}$. | |
| C. $\frac{e^2 - 1}{e}$. | D. $\frac{e^4 - 1}{e^2}$. | |

Câu 29. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^3 + 2x + 1$, trục hoành, $x = 1$ và $x = 2$ là

- | | | |
|---------------------|---------------------|-------|
| A. $\frac{31}{4}$. | B. $\frac{49}{4}$. | |
| C. $\frac{21}{4}$. | D. $\frac{31}{4}$. | |

Câu 30. Diện tích hình giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x$ và đồ thị hàm số $y = -x^2 + x$ bằng

- | | | |
|--------------------|---------------------|-------|
| A. 12. | B. $\frac{10}{3}$. | |
| C. $\frac{9}{8}$. | D. 6. | |

Câu 31. Diện tích hình giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2$ và đồ thị hàm số $y = x + 2$ bằng

- | | | |
|--------------------|--------------------|-------|
| A. 9. | B. $\frac{9}{4}$. | |
| C. $\frac{9}{2}$. | D. $\frac{8}{9}$. | |

Câu 32. Cho hình phẳng H giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$; $y = 0$; $x = 4$. Diện tích của hình phẳng H bằng

- | | | |
|---------------------|---------------------|-------|
| A. $\frac{16}{3}$. | B. 3. | |
| C. $\frac{15}{4}$. | D. $\frac{17}{3}$. | |

Câu 33. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ và các trục tọa độ. Khi đó giá trị của S bằng

- | | |
|-------------------|-------|
| A. $\ln 2 - 1$. | |
| B. $2\ln 2 - 1$. | |
| C. $2\ln 2 + 1$. | |
| D. $\ln 2 + 1$. | |

Câu 34. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2^x$, $y = 3 - x$, $y = 0$, $x = 0$ là

- | | |
|----------------------------|-------|
| A. $2 - \ln 2$. | |
| B. $2 - \frac{1}{\ln 2}$. | |
| C. $2 + \ln 2$. | |
| D. $2 + \frac{1}{\ln 2}$. | |

Câu 35. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các hàm số $y = x$ và $y = e^x$, trục tung và đường thẳng $x = 1$ được tính theo công thức

- | | |
|-------------------------------------|-------|
| A. $S = \int_0^1 e^x - 1 dx$. | |
| B. $S = \int_0^1 (e^x - x) dx$. | |
| C. $S = \int_0^1 (x - e^x) dx$. | |
| D. $S = \int_{-1}^1 e^x - x dx$. | |

Câu 36. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = x^3 - x$, $y = 2x$ và các đường $x = -1$, $x = 1$ được xác định bởi công thức?

- | | |
|---|-------|
| A. $S = \int_{-1}^0 (3x - x^3) dx + \int_0^1 (x^3 - 3x) dx$. | |
| B. $S = \int_{-1}^1 (3x - x^2) dx$. | |
| C. $S = \int_{-1}^0 (x^3 - 3x) dx + \int_0^1 (3x - x^3) dx$. | |
| D. $S = \left \int_{-1}^1 (3x - x^2) dx \right $. | |

Câu 37. Diện tích S của hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 2$, $x = 0$, $x = 1$ bằng

- | | |
|-----------------------|-------|
| A. $4\ln 2 + e - 5$. | |
| B. $4\ln 2 + e - 6$. | |
| C. $e^2 - 7$. | |
| D. $e - 3$. | |

Câu 38. Diện tích S của hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 - x$ và đồ thị hàm số $y = x - x^2$ bằng

A. 13. B. $\frac{81}{12}$.

.....

C. $\frac{9}{4}$. D. $\frac{37}{12}$.

.....

.....

Câu 39. Cho số dương a thỏa mãn hình phẳng giới hạn bởi các đường parabol $y = ax^2 - 2$ và $y = 4 - 2ax^2$ có diện tích bằng 16. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a \in (0;1)$.

.....

B. $a \in (1;2)$.

.....

C. $a \in (2;3)$.

.....

D. $a \in (3;4)$.

.....

.....

Câu 40. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = \ln x$; $y = 0$; $x = k$ ($k > 1$). Biết diện tích hình phẳng (H) bằng 1 (đvdt). Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $k \in (1;3)$.

.....

B. $k \in (3;5)$.

.....

C. $k \in (5;7)$.

.....

D. $k \in (7;9)$.

.....

.....

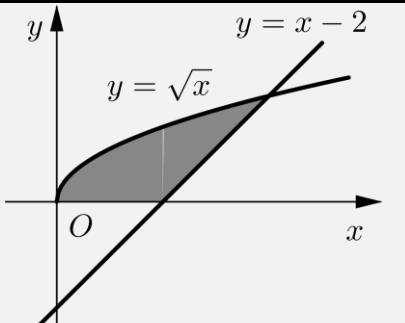
Câu 41. Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi $y = \sqrt{x}$, $y = x - 2$ và Ox (tô đậm trong hình vẽ). Diện tích của (H) bằng

A. $\frac{10}{3}$.

B. $\frac{16}{3}$.

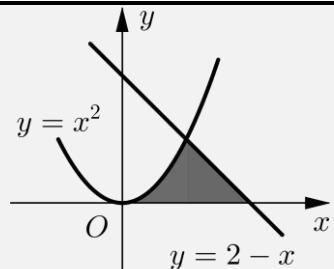
C. $\frac{7}{3}$.

D. $\frac{8}{3}$.



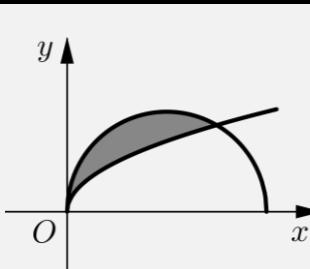
Câu 42. Diện tích hình phẳng tạo thành bởi parabol $y = x^2$, đường thẳng $y = -x + 2$ và trục hoành trên đoạn $[0; 2]$ (phần tô đậm trong hình vẽ)

- A. $\frac{3}{5}$. B. $\frac{5}{6}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{7}{6}$.



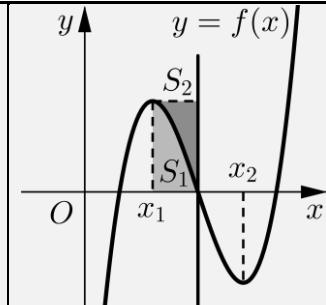
Câu 43. Cho (H) giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{x}$ và nửa đường tròn có phương trình $y = \sqrt{4x - x^2}$ với $(0 \leq x \leq 4)$ (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích của (H) bằng

- A. $\frac{4\pi + 15\sqrt{3}}{24}$. B. $\frac{8\pi - 9\sqrt{3}}{6}$. C. $\frac{10\pi - 9\sqrt{3}}{6}$. D. $\frac{10\pi - 15\sqrt{3}}{6}$.



Câu 44. Cho hình vẽ bên dưới biết $y = f(x)$ là hàm đa thức bậc 3 và phần gạch chéo là diện tích S_1 , S_2 . Cho biết $f(x_1) + f(x_2) = 0$ và $x_2 = x_1 + 4$. Tỷ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng

- A. 1. B. $\frac{4}{3}$. C. $\frac{5}{3}$. D. 2.



Câu 45. Cho $f(1-x) = \frac{1}{3}(x^2 - 2x + 1)$. Diện tích giới hạn bởi $y = f(x)$, $y = 0$ và $x = 1$ bằng

- | | |
|--------------------|--------------------|
| A. $\frac{1}{9}$. | B. $\frac{1}{3}$. |
| C. $\frac{2}{9}$. | D. $\frac{2}{3}$. |